ΠΕΙΡΑΜΑ VI
Περιοδική Κίνηση

Σκοπός πειράματος

Στο πείραμα αυτό θα μελετήσουμε τον εξαναγκασμένο αρμονικό ταλαντωτή και τη συμπεριφορά του στην περίπτωση παρουσίας δυνάμεων απόσβεσης. Πιο συγκεκριμένα θα εξετάσουμε:

- Το Νόμο του Hooke.
- Την εξάρτηση της περιόδου του ταλαντωτή από τις παραμέτρους του.
- Τον συντονισμό του ταλαντωτή συναρτήσει την συχνότητας της δύναμης εξαναγκασμού .
- Την περίοδο και την ελάττωση του πλάτους των ταλαντώσεων όταν υπάρχει αποσβεστική δυναμη.

Θεωρητικό υπόβαθρο

- Αρμονική Ταλάντωση.
  - Ορισμός αρμονικού ταλαντωτή, περίοδος, συχνότητα.
  - Απομάκρυνση, ταχύτητα και επιτάχυνση ταλαντωτή συναρτήσει του χρόνου.
  - Κινητική και δυναμική ενέργεια ταλαντωτή συναρτήσει του χρόνου, μέση κινητική και δυναμική ενέργεια.
- Νόμος του Hooke.
  - Ορισμός, σταθερά ελατηρίου.
- Εξαναγκασμένη Αρμονική Ταλάντωση
- Αποσβενυμένη αρμονική ταλάντωση.
  - Εξισώσεις κίνησης αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση.
  - Σταθερά απόσβεσης, παράγοντας ποιότητας, χαρακτηριστικοί χρόνοι (χρόνος αποκατάστασης, χρόνος υποδιπλασιασμού).
  - Ενέργεια αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση.

Για την κατανόηση και σωστή τέλεση του πειράματος θα πρέπει υποχρεωτικά να γνωρίζετε πριν κάνετε το πείραμα τη θεωρία που παρουσιάζεται στο **Κεφάλαιο Τ1** του βιβλίου Φυσική των Serway & Jewett.

Συνοπτική Θεωρία

Περιοδικά φαινόμενα ονομάζονται φαινόμενα τα οποία επαναλαμβάνονται μετά από ίσα χρονικά διαστήματα. Μια περίπτωση περιοδικών φαινομένων είναι η **απλή αρμονική ταλάντωση που αφορά φαινόμενα η εξέλιξη των οποίων περιγράφεται από μιά ημιτονοειδή συνάρτηση**. Τέτοια φαινόμενα είναι η ταλάντωση που εκτελεί

το εκκρεμές, η ταλάντωση που εκτελεί μία μάζα αναρτημένη από ελατήριο, ή η μεταβολή της τάσης και της έντασης σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που περιέχει πυκνωτή και πηνίο.
Βασικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν μία ταλάντωση είναι η περίοδος T η οποία ορίζεται ως το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων του φαινομένου, και η συχνότητα ν η οποία ορίζεται ως ο αριθμός των επαναλήψεων στη μονάδα του χρόνου. Επομένως είναι $\nu = \frac{1}{T}$.

Προφανώς η περίοδος έχει μονάδες χρόνου, και η συχνότητα έχει μονάδες αντίστροφου χρόνου, ή Hertz.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Μια συνηθισμένη περίπτωση αρμονικής ταλάντωσης στη μηχανική είναι η ταλάντωση μάζας αναρτημένης από ελατήριο. Εάν έχουμε ένα ελατήριο το οποίο έχει τεντωθεί ή συμπιεστεί από το φυσικό του μήκος κατά απόσταση x, τότε στο άκρο του ασκείται μία **δύναμη επαναφοράς** η οποία δίνεται από το **νόμο του Hooke:**

$$F = -kx$$

όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου.

Από τον Δεύτερο Νομου του Newton έχουμε για την εξίσωση κίνησης σώματος μάζας m που είναι προσδεμένο στο άκρο του ελατηρίου:

$$m\vec{a} = \Sigma\vec{F} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (1)$$

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \qquad (2)$$

όπου:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

A είναι το πλάτος της ταλάντωσης, δηλαδή η μέγιστη απομάκρυνση του ελατηρίου, και δ είναι η αρχική φάση.

Από τη λύση της εξίσωσης (1) έχουμε ότι η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (3)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι η περίοδος της ταλάντωσης εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά του ταλαντωτή και όχι από το πλάτος της ταλάντωσης.

Επιπλέον παραγωγίζοντας τη σχέση (2) ως προς το χρόνο παίρνουμε μια έκφραση για την ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \delta) \qquad (4)$$

και αντίστοιχα παραγωγίζοντας την ταχύτητα ως προς το χρόνο παίρνουμε την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης:

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) βλέπουμε ότι η ταχύτητα έχει διαφορά φάσης π/2 σε σχέση με την απομάκρυνση και η επιτάχυνση έχει διαφορά φάσης π σε σχέση με την απομάκρυνση.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση με Απόσβεση

Η παραπάνω μελέτη αναφέρεται σε έναν εξιδανικευμένο ταλαντωτή όπου δεν υπάρχουν τριβές. Στα περισσότερα φαινόμενα όμως παρατηρούνται τριβές. Στη γενικότερη περίπτωση η δύναμη της τριβής δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F} = -b\vec{\upsilon} = -b\frac{d\vec{x}}{dt}$$

όπου: b είναι ο συντελεστής της τριβής, και
υ η ταχύτητα με την οποία κινείται το σώμα πάνω στην επιφάνεια τριβής.

Εάν λάβουμε υπ'οψιν μας και τις δυνάμεις τριβής, η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή (1) παίρνει τη μορφή

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}x \quad (6)$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση έχει ως λύση τη

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \delta) = A(t)\cos(\omega t + \delta) \quad (7)$$

όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ όταν $k > \frac{b^2}{4m}$ (8)

και $A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$ το πλάτος της ταλάντωσης συναρτήσει του χρόνου.

Με βάση την εξίσωση (7) μπορούμε να ορίσουμε δύο ποσότητες που χαρακτηρίζουν πόσο έντονη είναι η απόσβεση:

(α) **Το χρόνο αποκατάστασης τ** που ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται ώστε να ελαττωθεί το πλάτος της ταλάντωσης στο 1/e του αρχικού.
Από τη Σχέση (7) έχουμε ότι $\tau = \frac{2m}{b}$

(β) **Το χρόνο υποδιπλασιασμού $T_{1/2}$** που ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται ώστε να ελαττωθεί το πλάτος της ταλάντωσης στο μισό

Από τη Σχέση (7) έχουμε ότι $T_{1/2} = \tau \ln 2 = \dfrac{2m\ln 2}{b}$ (9)

Ενέργεια Αρμονικού Ταλαντωτή

Κάθε χρονική στιγμή η κινητική ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή χωρίς τριβές είναι:

$$K(t) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

Αντίστοιχα, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)$$

και η συνολική μηχανική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι

$$E = U + K = \frac{1}{2}kA^2 \quad (10)$$

όπου κάναμε χρήση της σχέσης (3).

Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνολική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή διατηρείται και εξαρτάται μόνο από τη σταθερά του ελατηρίου και το αρχικό πλάτος.

Αντίστοιχα μπορούμε να υπολογίσουμε και τη μέση δυναμική ενέργεια κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης. Από τον ορισμό της μέσης τιμής ενός μεγέθους έχουμε:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)dt = \frac{1}{2T}kA^2(\frac{1}{2}T) = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E \quad (11)$$

οπου Ε είναι η συνολική μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή (Σχέση 10).

Κατ' αναλογία η μέση κινητική ενέργεια του ταλαντωτή στη διάρκεια μιας περιόδου θα είναι:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T K(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \delta)dt = \frac{1}{2T}mA^2\omega^2(\frac{1}{2}T) = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E \quad (12)$$

όπου Ε είναι η συνολική μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή (Σχέση 10), ενώ κάναμε χρήση του ορισμού της γωνιακής συχνότητας (Σχέση 3).

Επομένως βλέπουμε ότι σε κάθε αρμονικό ταλαντωτή χωρίς απόσβεση η μέση δυναμική και η μέση κινητική ενέργεια κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης ισούται με το μισό της συνολικής μηχανικής του ενέργειας.

Εάν έχουμε απώλειες ενέργειας (π.χ. λόγω απόσβεσης) τότε αυτές θα είναι ίσες με το έργο της δύναμης απόσβεσης. Επομένως ο ρυθμός απώλειας ενέργειας θα ισούται με την ισχύ της δύναμης απόσβεσης, δηλαδή:

$$dE = \vec{F}\cdot d\vec{s} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}dt = (-b\vec{\upsilon})\cdot\vec{\upsilon}dt = -b\upsilon^2 dt$$

Ο μέσος ρυθμός απώλειας ενέργειας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου θα είναι

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\left\langle b\upsilon^2 \right\rangle = -b\left\langle \upsilon^2 \right\rangle$$

Από τη Σχέση (12) όμως έχουμε ότι

$$\left\langle K \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m\upsilon^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \frac{1}{2} E \Rightarrow$$

$$\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \frac{E}{m}$$

Οπότε $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -b\frac{E}{m}$ (13)

Επομένως η ενέργεια που χάνεται κατά τη διάρκεια μιας περιόδου T θα είναι:

$$\Delta E = -\frac{b}{m} ET = -\frac{b}{m} E \frac{2\pi}{\omega} = -2\pi \frac{b}{(km)^{1/2}} E$$

Ενα μέτρο των απωλειών ενέργειας λόγω της απόσβεσης είναι ο παράγοντας ποιότητας που ορίζεται ως ο λόγος της ενέργειας της ταλάντωσης κατά τη διάρκεια ενός κύκλου πολλαπλασιασμένος επί 2π (2π<E>) δια τη μέση απώλεια ενέργειας ανά κύκλο:

$$Q = \frac{2\pi E}{\Delta E} = \frac{m\omega}{b} = \frac{(mk)^{1/2}}{b}$$

Με βάση τον ορισμό των χρόνων αποκατάστασης και υποδιπλασιασμού έχουμε:

$$Q = \frac{1}{2}\omega\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)\frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{\pi T_{1/2}}{T \ln 2}$$

Όλες οι παραπάνω σχέσεις που αφορούν ταλάντωση με απόσβεση ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι η σταθερά απόσβεσης είναι αρκετά μικρή ώστε ο ταλαντωτής να μην χάνει σημαντική ενέργεια κατά τη διάρκεια ενός κύκλου και επομένως η σχέση (8) μπορεί να προσεγγιστεί με τη σχέση (3).

Η δύναμη του ιξώδους ως αποσβεστική δύναμη

Ιξώδες λέγεται η εσωτερική τριβή μεταξύ των στρωμάτων ενός ρευστού καθώς ρέει. Αντίστοιχα η δύναμη της τριβής που ασκείται σε ένα σώμα που κινείται μέσα σε ένα ρευστό οφείλεται στην επίδραση του ιξώδους. Η δυναμη του ιξώδους που ασκείται σε μια σφαίρα που κινείται εντός ενός ρευστού δίνεται από την σχέση:

$$F_{\iota\xi} = 6\pi\eta r\upsilon = 6\pi\eta r\frac{dx}{dt} \qquad (14)$$

όπου: η είναι ο συντελεστής ιξώδους του ρευστού
υ είναι η ταχύτητα του σφαιριδίου
r είναι η ακτίνα του σφαιριδίου (η οποία πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις του δοχείου)

Επομένως ένα σώμα που εκτελεί αρμονική ταλάντωση σε ένα ρευστό με συντελεστή ιξώδους η θα δέχεται αποσβεστική δύναμη που δίνεται από την σχέση (14). Σε αυτή την περίπτωση, κατ' αναλογία με την σχέση (6) ο συντελεστής απόσβεσης θα ισούται με $b = 6\pi\eta r$. (15)

Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με Απόσβεση

Η παραπάνω ανάλυση ισχύει στην περίπτωση που δεν προσφέρεται ενέργεια στον ταλαντωτή. Εαν το σώμα δέχεται την επίδραση μια αρμονικής δύναμης που ασκείται στην ίδια κατεύθυνση με την δύναμη επαναφοράς τότε λέμε ότι εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Σε αυτή την περίπτωση η σχεση (6) γράφεται ως

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad (16)$$

όπου

$F_0\cos\omega t$ είναι η δύναμη που προκαλεί την εξεναγκασμένη ταλάντωση (οδηγήτρια δυναμη) η οποία έχει γωνιακή συχνότητα ω.

b είναι η σταθερά απόσβεσης.

Σε αυτή την περίπτωση ο ταλαντωτής θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ίση με τη συχνότητα της οδηγήτριας δύναμης:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

και πλάτος

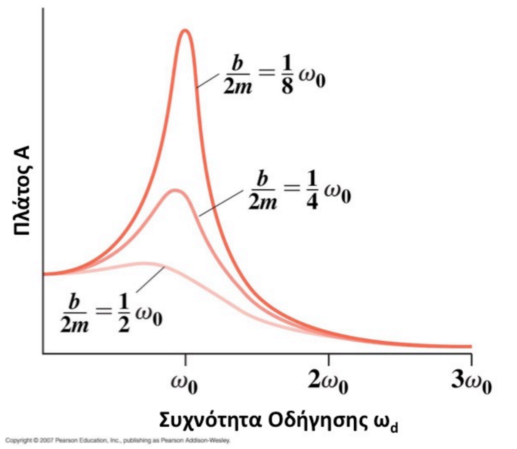
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \qquad (17)$$

όπου

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ είναι η συχνότητα του ταλαντωτή εαν δεν του ασκείται καμία οδηγήτρια ή αποσβεστική δύναμη (ιδιοσυχνότητα).

Από τη σχέση (17) βλέπουμε ότι το πλάτος την ταλάντωσης δεν ελαττώνεται παρά την ύπαρξη της απόσβεσης. Αυτό συμβαίνει γιατί η οδηγήτρια δύναμη προσφέρει στον ταλαντωτή την ενέργεια που χάνεται λόγω της απόσβεσης.

Εαν κάνουμε το διάγραμμα του πλάτους της ταλάντωσης συναρτήσει της συχνότητας της οδηγήτριας δύναμης ω για διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης b παίρνουμε καμπύλες της μορφής που φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1. Διάγραμα του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης συναρτήσει της συχνότητας οδήγησης για διαφορετικές τιμές της σταθεράς απόσβεσης b. Η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι ω_0

Βλέπουμε ότι όταν η συχνότητα της οδηγήτριας δύναμης ισούται με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή το πλάτος μεγιστοποιείται. Τότε λέμε ότι έχουμε **συντονισμό**, και η συχνότητα ω_0 λέγεται **συχνότητα συντονισμού**. Στην περίπτωση που υπάρχει αποσβεση η συχνότητα συντονισμού είνα $\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{b}{m}\right)^2}$.

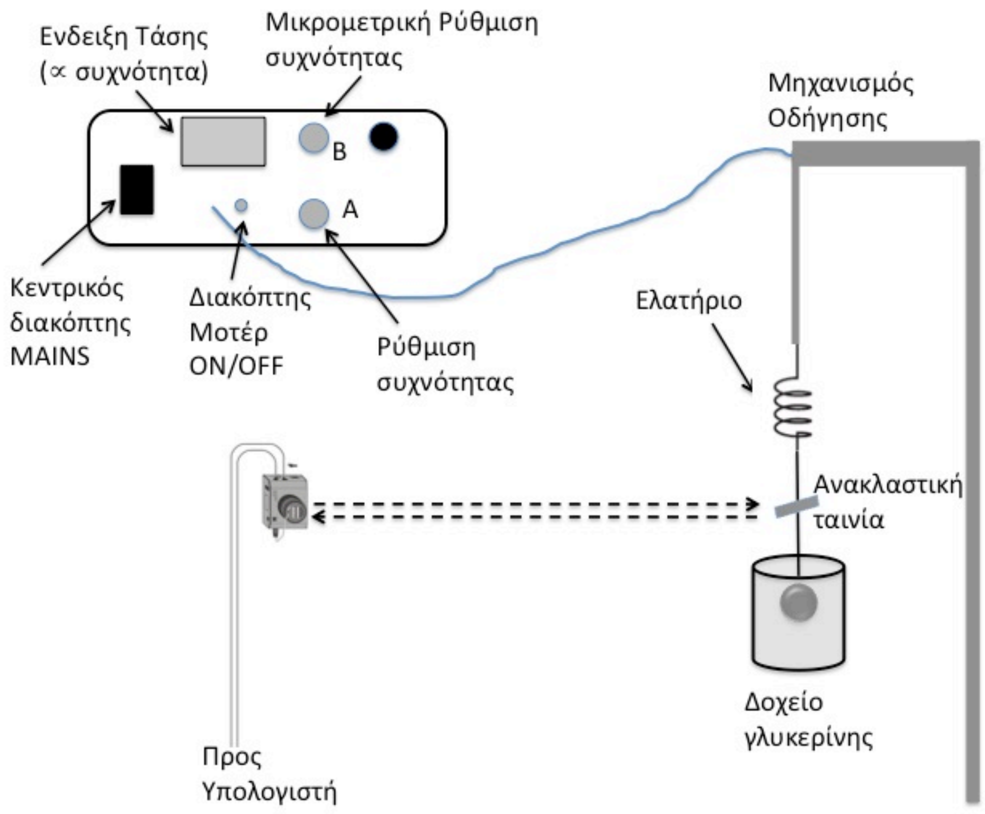
Στον συντονισμό η μεταφορά ενέργειας από την οδηγήτρια δύναμη στον ταλαντωτή μεγιστοποιείται με αποτέλεσμα να μεγιστοποιείται το πλάτος.

Πειραματική διάταξη

Η διάταξη του πειράματος αποτελείται από ένα ελατήριο το οποίο αναρτάται από μια διάταξη που το εξαναγκάζει να εκτελέσει αρμονική ταλάντωση (Σχήμα 2). Η μάζα που αναρτάται από το ελατήριο μπορεί να εμβαπτισθεί σε δοχείο που περιέχει διάλυμα γλυκερίνης 95%.

Ο ταλαντωτής ελέγχεται από ένα σύστημα το οποίο μας επιτρέπει τον έλεγχο της συχνότητας ταλάντωσης.

Η κίνηση του ταλαντωτή καταγράφεται με τη βοήθεια ψηφιακής κάμερας που είναι τοποθετημένη απέναντι από τον ταλαντωτή (Σχ. 2). Η κάμερα εκπέμπει παλμούς φωτός με σταθερό ρυθμό οι οποίοι ανακλώνται από ειδική ανακλαστική ταινία που έχει επικολληθεί στο κινητό. Στη συνέχεια η θέση της ανακλαστικής επιφάνειας (και κατά συνέπεια του κινητού) καταγράφονται από την κάμερα και παρουσιάζονται στον ηλεκτρονικό υπολογιστή που ελέγχει την κάμερα.



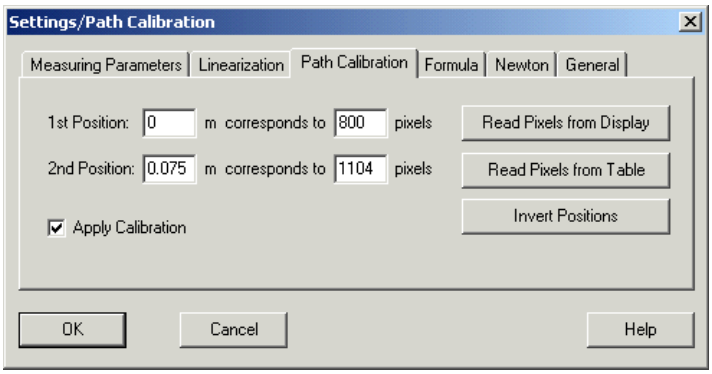
Σχήμα 2 Η πειραματική διάταξη και η διάταξη καταγραφής της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

Βαθμονόμηση της καταγραφικής διάταξης

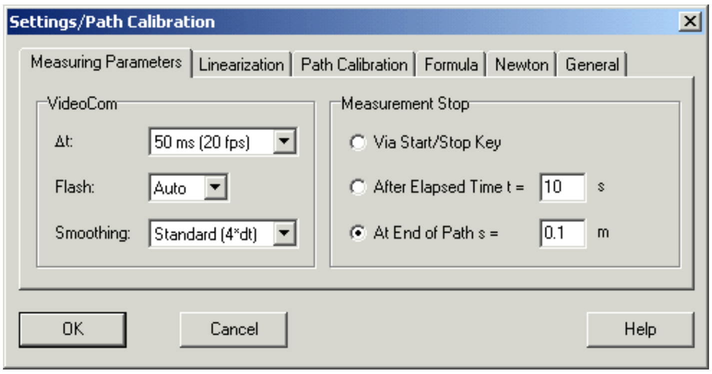
Πρίν μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη ψηφιακή κάμερα για τη λήψη μετρήσεων θα πρέπει πρώτα να βαθμονομήσουμε την κλίμακα μέτρησης αποστάσεων, **δηλαδή να μετρήσουμε την απόσταση που αντιστοιχεί σε 1 pixel της κάμερας** (από ποιούς παράγοντες εξαρτάται η κλίμακα αυτή;).

Για αυτό το σκοπό ακολουθούμε την ακόλουθη διαδικασία:

1. Τοποθετούμε την κάμερα σε σταθερή θέση, σε απόσταση περίπου 0.5m από τον ταλαντωτή.
2. Μετράμε με το διαστημόμετρο την απόσταση των δύο τανιών που είναι τοποθετημένες στο έλασμα. Για μεγαλύτερη ακρίβεια μετράμε την απόσταση των αντίστοιχων πλευρών των ταινιών και παίρνουμε το μέσο όρο τους.
3. Αναρτούμε το έλασμα από τον ταλαντωτή.
4. “Τρέχουμε” το πρόγραμμα ελέγχου της ψηφιακής κάμερας (VideoCom motions).
5. Επιλέγουμε “Intensity test” από τα μενού ή τα εικονίδια του προγράμματος.
6. Ευθυγραμμίζουμε την κάμερα ώστε να βλέπουμε δύο έντονες κορυφές στην οθόνη του υπολογιστή.
7. Στη συνέχεια επιλέγουμε “Path” από τα μενού ή τα εικονίδια του προγράμματος.
8. Επιλέγουμε το μενού “Settings/Path Calibration” (Σχ. 3α)
9. Συμπληρώνουμε τις τιμές 0.0 και 0.05m (ή οποια απόσταση μετρήσαμε) για τις θέσεις των δύο ταινιών στο παράθυρο διαλόγου “Path Calibration”.
10. Πατούμε το πλήκτρο “Read pixels from Display” και επιλέγουμε “Apply Calibration”.
11. Επιλέγουμε το μενού “Measuring Parameters” (Σχ. 3b)
12. Επιλέγουμε τον χρόνο δειγματοληψίας τη κάμερας Δt = 6.25msec.
13. Τώρα είμαστε έτοιμοι να κάνουμε μετρήσεις.



Σχήμα 3α Το παράθυρο διαλόγου “Settings/Path Calibration”.



Σχήμα 3β Το παράθυρο διαλόγου “Settings/Measuring Parameters”.

Πειραματική διαδικασία

Α′ Μέρος. Μέτρηση της σταθεράς του ελατηρίου

Μία βασική παράμετρος για την εκτέλεση αυτού του πειράματος είναι η σταθερά του ελατηρίου. Για να μετρήσουμε τη σταθερά του ελατηρίου ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Τοποθετούμε το έλασμα με τις δύο ανακλαστικές ταινίες στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου.
2. Καταγράφουμε τη θέση της πρώτης ταινίας από την ένδειξη στη οθόνη του προγράμματος ελέγχου της κάμερας (Θέση ισορροπίας s_0).
3. Στό ελεύθερο άκρο του ελάσματος τοποθετούμε σώματα διαφορετικής μάζας και καταγράφουμε την απομάκρυνση του ελατηρίου για κάθε διαφορετική δύναμη $F = mg$ σε έναν πίνακα της μορφής:

Πίνακας 1

Θέση Ισορροπίας s_0			
Μάζα $m\pm\delta m$	**Απομάκρυνση** $s\pm\delta s$	**Επιμήκυνση** $x=s-s_0$ $\pm\delta x$	**Δύναμη** $F\pm\delta F$

<u>Η συνολική μάζα που αναρτάται από το ελατήριο ΔΕΝ πρέπει να υπερβαίνει τα 125 gr.</u>

4. Μετράμε τη μάζα του κάθε σώματος με τον ηλεκτρονικό ζυγό.

Αφαιρούμε από την απομάκρυνση s την θέση ισορροπίας s_0 και υπολογίζουμε την επιμήκυνση $x\pm\delta x$ του ελατηρίου.

1. Αφαιρούμε το έλασμα με τις ανακλαστικές ταινίες από το ελατήριο.
2. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα εξασκούμενης δύναμης – επιμήκυνσης με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 1, και υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας η οποία θα μας δώσει τη σταθερά του ελατηρίου k και το σφάλμα της δk, που θα χρησιμοποιήσουμε στο πείραμα.

Β′ Μέρος. Απλή αρμονική ταλάντωση

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την απλή αρμονική ταλάντωση.

1. Μετράμε τη μάζα της σφαίρας που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια του πειράματος.

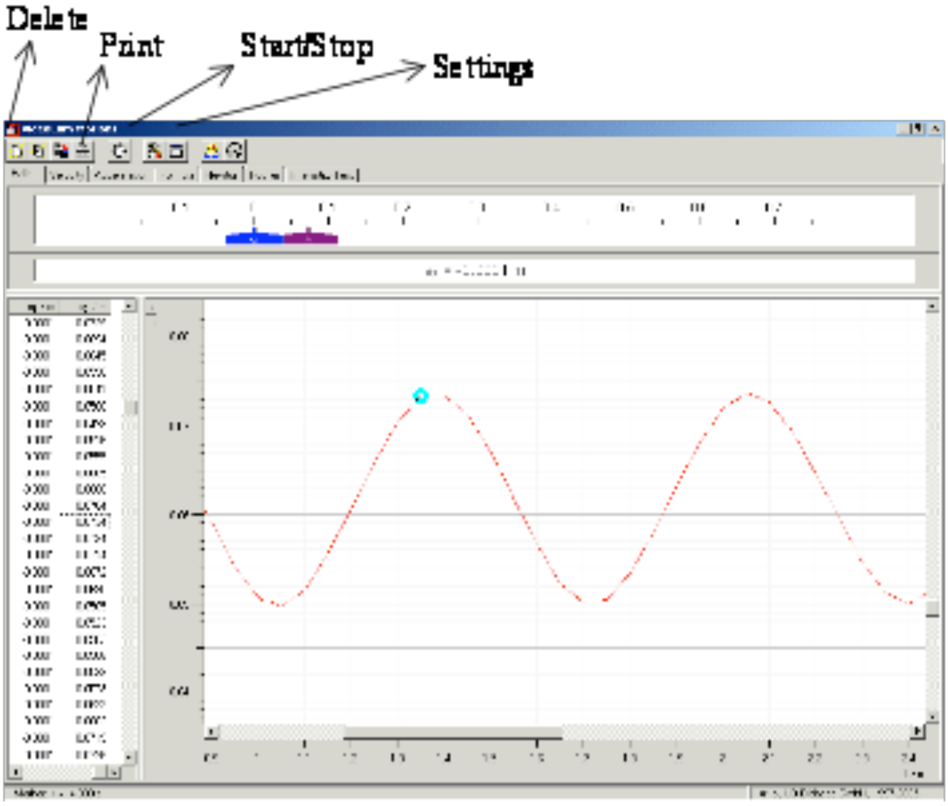
2. Τοποθετούμε στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου τη σφαίρα με την ανακλαστική ταινία.

3. Μετατοπίζουμε λίγο (~1cm) την σφαίρα ώστε το ελατήριο να εκτελέσει αρμονική ταλάντωση.

4. Διαγράφουμε τυχόν προηγούμενες μετρήσεις με το πλήκτρο “Delete” ή το F4 (Σχ. 3).

5. Ελευθερώνουμε το κινητό και ταυτόχρονα ξεκινούμε την καταγραφή της κινησής του κάνοντας “κλικ” στο πλήκτρο “start” (ή με το F9).

6. Αφού το κινητό εκτελέσει περίπου 20 ταλαντώσεις σταματάμε την καταγραφή της κίνησης κάνοντας “κλικ” στο πλήκτρο “end” (ή με το F).



Σχήμα 4. Τα βασικά πλήκτρα μετρήσεων του ‘VideoCom Motions’.

7. Στον υπολογιστή βλέπουμε τη θέση της σφαίρας συναρτήσει του χρόνου τόσο σε μορφή πίνακα όσο και σε μορφή διαγράμματος. Οι μετρήσεις μπορούν να αποθηκευθούν σε αρχείο κειμένου επιλέγοντας “Save” (ή με το F2).

   Επιπλέον το διάγραμμα μπορεί να εκτυπωθεί επιλέγοντας ‘print’.

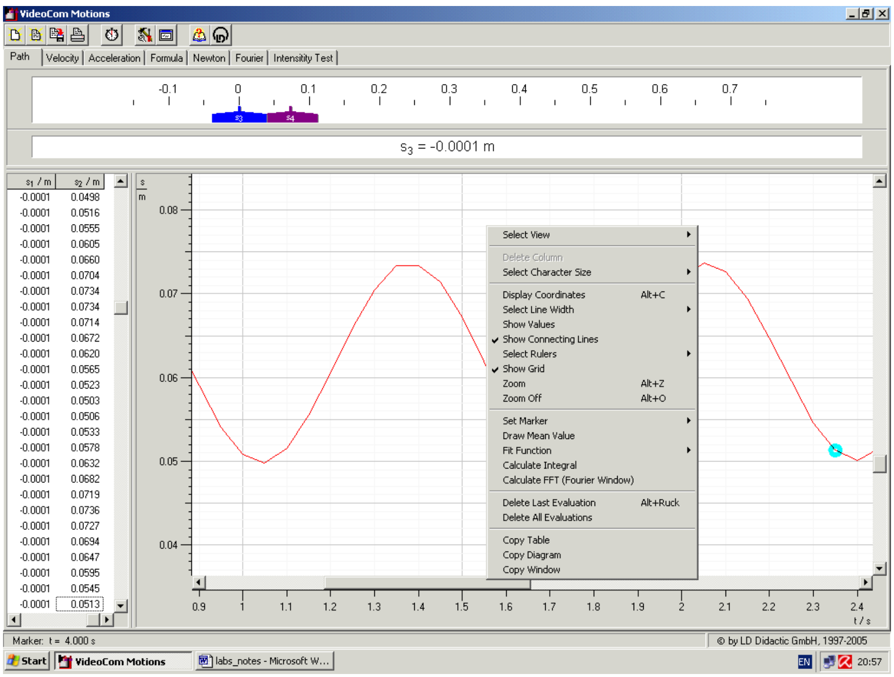
   Σημείωση: Το αρχείο στο οποίο έχουν αποθηκευτεί οι μετρήσεις είναι ένα αρχείο κειμένου. Οι πρώτες γραμμές περιέχουν πληροφορίες σχετικές με τις παραμέτρους του προγράμματος. Στη συνέχεια ακολουθεί ένας πίνακας με την απομάκρυνση του κινητού σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Ο πίνακας αυτός δεν περιέχει τον χρόνο της εκάστοτε μέτρησης όμως αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε εύκολα δεδομένου ότι γνωρίζουμε τη χρονική απόσταση των παλμών.

8. Από το διάγραμμα απομάκρυνσης-χρόνου μετράμε τον χρόνο που απαιτείται για την εκτέλεση 10 ταλαντώσεων.

9. Η μέτρηση χρόνου μπορεί να γίνει μεγενθύνοντας το διάγραμμα μετατόπισης-χρόνου ώς εξής:
Αρχικά κάνουμε δεξιό κλικ και επιλέγουμε ‘Zoom’ στο μενού που εμφανίζεται (Σχ. 5; εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα πλήκτρα Alt-Z). Στη συνέχεια κάνουμε κλικ στη πάνω αριστερή γωνία της περιοχής που θέλουμε να μεγενθύνουμε, μετακινούμε τον κέρσορα και κάνουμε κλικ στη κάτω δεξιά γωνία. Επιλέγουμε μια ταλάντωση που μας ενδιαφέρει και τη μεγενθύνουμε με τον παραπάνω τρόπο. Εάν κάνουμε κλικ με το ποντίκι το σημείο που μας ενδιαφέρει στον πίνακα μετρήσεων θα δούμε να έχουν επιλεγεί οι τιμές για αυτό το σημείο. Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας σε κατάλληλο Πίνακα.

10. Διαιρώντας το χρόνο με τον αριθμό των ταλαντώσεων υπολογίζουμε την περίοδο και στη συνέχεια τη συχνότητα του ταλαντωτή. Αυτή θα είναι η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.

11. Με βάση τη σταθερά του ελατηρίου που μετρήσατε στο πρώτο μέρος, να υπολογίσετε την αναμενόμενη περίοδο ταλάντωσης. **Να την συγκρίνετε με την περίοδο που μετρήσατε στα προηγούμενα βήματα.**



Σχήμα 5. Το μενού επεξεργασίας του διαγράμματος.

Γ′ Μέρος. Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση

1. Τοποθετούμε το δοχείο διαλύματος γλυκερίνης (95%) κάτω από το ελατήριο.
2. Τοποθετούμε τον άξονα της σφαίρας στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, φροντίζοντας η σφαίρα να είναι πλήρως εμβαπτισμένη στο διάλυμα γλυκερίνης, και να βρίσκεται στο μέσο του δοχείου.
3. Βεβαιωνόμαστε ότι ο διακόπτης Motor ON/OFF είναι στη θέση OFF.
4. Θέτουμε σε λειτουργία το σύστημα οδήγησης (διακόπτης MAINS).
5. Περιστρέφουμε τον διακόπτη ρύθμισης συχνότητας (A) ώστε η ένδειξη στην οθόνη να είναι 3.5V (Σχήμα 2)
6. Περιστρέφουμε τον διακόπτη μικρομετρικής ρύθμισης συχνότητας (Motor speed Fine Adjustment - B) ώστε και οι δύο φωτεινές ενδείξεις να είναι σβηστές.
7. Θέτουμε τον διακόπτη Motor ON/OFF στη θέση ON.
8. Παρατηρούμε ότι η σφαίρα αρχίζει να ταλαντώνεται.
9. Περιστρέφουμε τον διακόπτη ρύθμισης συχνότητας (A) αργά ώστε να αυξάνεται η ένδειξη της τάσης στη οθόνη.
10. Παρατηρούμε ότι η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η συχνότητα της οδηγήτριας δύναμης.
11. Για μια συγκεκριμένη συχνότητα το πλάτος της ταλάντωσης θα μεγιστοποιηθεί, και στη συνέχεια θα ελαττωθεί. Στο μέγιστο πλάτος έχουμε συντονισμό. Καταγράφουμε την τιμή της τάσης για την οποία έχουμε το μέγιστο πλάτος.
12. Θέτουμε το διακόπτη Motor ON/OFF στη θέση OFF.
13. Στη συνέχεια θέτουμε τον διακόπτη ρύθμισης συχνότητας (A) ώστε η ένδειξη στην οθόνη να είναι και πάλι 3.5V (Σχήμα 6).
14. Θέτουμε το διακόπτη Motor ON/OFF στη θέση ON.
15. Καταγράφουμε 10-15 ταλάντωσεις του σώματος με την κάμερα.
16. Θέτουμε το διακόπτη Motor ON/OFF στη θέση OFF.
17. Μετράμε την απομάκρυνση 5 μεγίστων και ελαχίστων της ταλάντωσης.
18. Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας σε πίνακα της μορφής του Πίνακα 2α
19. Προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας από το ½ της απόστασης μεταξύ διαδοχικών μεγίστων και ελαχίστων της ταλάντωσης, και υπολογίζουμε τη μέση τιμή τους.

Πίνακας 2α

α/α	**Μέγιστη Απομάκρυνση $S_{max} \pm \delta S_{max}$**	**Ελάχιστη Απομάκρυνση $S_{min} \pm \delta S_{min}$**
Μέση Θέση Ισορροπίας $s_0 = \left(\bar{s}_{\max} + \bar{s}_{\min}\right)/2$		

20. Αυξάνουμε την συχνότητα ταλάντωσης με μικρά βήματα (0.1V) μέχρι τάση 5V.
21. Επαναλαμβάνουμε τα βήμματα 14 – 16 για κάθε νέα τάση.
22. Για κάθε μια συχνότητα (τάση), συμπεριλαμβανομένης της πρώτης, μετράμε την απομάκρυνση ενός μεγίστου της ταλάντωσης.
23. Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας σε πίνακα της μορφής

Πίνακας 2β

Μέση Θέση Ισορροπίας $\bar{s}_0$				
α/α	**Απομάκρυνση s±δs**	**Πλάτος x= s - $\bar{s}_0$ ±δx**	**Τάση V**	**Συχνότητα ν**
…	…	…	…	…

24. Σημειώνουμε τη σχέση τάσης – συχνότητας που δίνεται στο εργαστήριο.
25. Μετατρέπουμε την τάση σε συχνότητα με βάση την παραπάνω σχέση μετατροπής.
26. Αφαιρούμε τη θέση ισορροπίας που υπολογίσαμε στο βήμα 19 από τις μετρήσεις της απομάκρυνσης προκειμένου να υπολογίσουμε το πλάτος της ταλάντωσης.
27. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα πλάτους – συχνότητας.
28. Με βάση αυτό το διάγραμμα εκτιμούμε τη συχνότητα συντονισμού. Συμφωνεί με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος;

Δ′ Μέρος. Αποσβενυμένη αρμονική ταλάντωση

1. Τοποθετούμε τη μάζα του ταλαντωτή μέσα στο δοχείο με το διάλυμα γλυκερίνης.
2. Θέτουμε την συχνότητα οδήγησης στη συχνότητα συντονισμού που σημειώσαμε στο βήμα 12 του Γ' μέρους.
3. Ενεργοποιούμε τον μηχανισμό οδήγησης (Motor ON), και καταγράφουμε την ταλάντωση του σώματος όπως και στο προηγούμενο μέρος.
4. Μετά από μερικές ταλαντώσης θέτουμε τον διακόπτη Motor ON/OFF στη θέση OFF.
5. Καταγράφουμε την αποσβενύμενη ταλάντωση μέχρι το πλάτος να γίνει μικρότερο από την ανάλυση της κάμερας.
6. Καταγράφουμε την απομάκρυνση του ταλαντωτή όταν έχει σταματήσει η ταλάντωση. Αυτή θα είναι η θέση ισορροπίας s_0.
7. Από το διάγραμμα απομάκρυνσης-χρόνου (Σχ. 6) μετράμε τη μέγιστη και ελάχιστη απομάκρυνση της μάζας και τους αντίστοιχους χρόνους για όσο το δυνατόν περισσότερες διαδοχικές ταλαντώσεις γίνεται. Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας σε Πίνακα της μορφής

Πίνακας 3

Θέση Ισορροπίας s_0				
α/α	**Απομάκρυνση s±δs**	**Χρόνος t±δt**	**Πλάτος x±δx**	**ln(|x|) ±δ(ln|x|)**

8. Από τη σχέση (7) βλέπουμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλεται εκθετικά με το χρόνο: $A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$.
   Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να την γραμμικοποιήσουμε:
   $$\ln A(t) = \ln A_0 - \frac{b}{2m}t$$
   και από το διάγραμμα $\ln x - t$ (όπου x είναι το πλάτος της ταλάντωσης σε κάθε κύκλο και t η χρονική στιγμή μέτρησης του πλάτους) μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά απόσβεσης b.
9. Κατασκευάζουμε **σε χαρτί μιλιμετρέ** το διάγραμμα $\ln(|x|) - t$, όπου ως x παίρνουμε την απόλυτη τιμή του πλάτους. Να δείξετε ότι το πλάτος είναι εκθετική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε τη σταθερά απόσβεσης b.

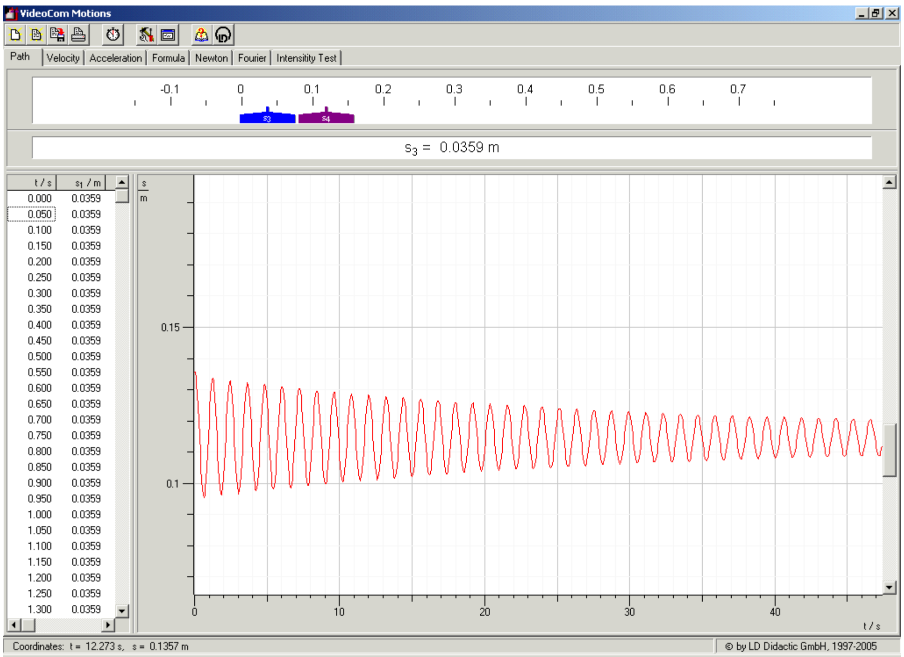
10. Από το παραπάνω διάγραμμα να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για την ελάττωση του πλάτους ταλάντωσης στο μισό του αρχικού πλάτους ($T_{1/2}$). (Να λάβετε υπ' οψιν σας ότι $\ln {A_0}/{2} = \ln A_0 - \ln 2$)

11. Να συγκρίνετε το χρόνο $T_{1/2}$ με αυτόν που υπολογίζετε με βάση τη σχέση (9) και τη σταθερά απόσβεσης που μετρήσατε στο βήμα 10.

12. Με βάση την σχέση 15 και τον συντελεστή απόσβεσης που βρήκαμε στο βήμα 9, υπολογίζουμε τον συντελεστή ιξώδους του διαλύματος γλυκερίνης.

13. Συγκρίνουμε την τιμή του ιξώδους που υπολογίσαμε με την τιμή του ιξώδους που θα αναμέναμε για διάλυμα γλυκερίνης 95%.

    Σημείωση: καταγράψτε την θερμοκρασία του διαλύματος και βρήτε την τιμή του ιξώδους που αντιστοιχεί σε αυτή τη θερμοκρασία.



Σχήμα 6. Διάγραμμα απομάκρυνσης-χρόνου για την περίπτωση της αποσβενυμένης αρμονικής ταλάντωσης.

Ερωτήσεις

1) Πως θα επηρεαζόταν το πειραμά μας εάν η σταθερά του ελατηρίου ήταν διαφορετική (μεγαλύτερη ή μικρότερη) ;
2) Ποιά ειναι η φυσική σημασία της διατομής στο διάγραμμα δύναμης-απομάκρυνσης που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της σταθεράς του ελατηρίου;
3) Τι μορφή θα είχε το διάγραμμα πλάτους – συχνότητας εαν δεν υπήρχε απόσβεση;
4) Εξαρτάται η μέτρηση του χρόνου υποδιπλασιασμού στο βήμα 10 του Δ' μέρους, από ποιό αρχικό πλάτος θα θεωρήσουμε;

5) Αλλάζει η περίοδος της ταλάντωσης όταν έχουμε απόσβεση;

Βιβλιογραφία

Serway R. A. & Jewett J.W., Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς, 8η Εκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Χαλδούπη Χ., Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής, Μηχανική - Θερμότητα, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 1997

Instruction Sheet 337 47 (Video Com), Leybold Didactic GmbH