ΠΕΙΡΑΜΑ Ι-α
Απλό εκκρεμές

Σκοπός πειράματος

Στο πείραμα αυτό θα μελετήσουμε το απλό ή μαθηματικό εκκρεμές και θα μετρήσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας. Θα εξετάσουμε λοιπόν πειραματικά τα εξής:

- Την ταλάντωση του απλού εκκρεμούς.
- Τις παραμέτρους από τις οποίες εξαρτάται η περίοδός του.

Θεωρητικό υπόβαθρο

- Αρμονική Ταλάντωση.
  - Ορισμός αρμονικού ταλαντωτή, περίοδος, συχνότητα.
  - Απομάκρυνση, ταχύτητα και επιτάχυνση ταλαντωτή συναρτήσει του χρόνου.
  - Κινητική και δυναμική ενέργεια ταλαντωτή συναρτήσει του χρόνου, μέση κινητική και δυναμική ενέργεια.
- Απλό ή μαθηματικό εκκρεμές.
  - Ορισμός, μαθηματική περιγραφή.
  - Περίοδος του εκκρεμούς.
- Αποσβενυμένη αρμονική ταλάντωση.
  - Εξισώσεις κίνησης αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση.
  - Σταθερά απόσβεσης, παράγοντας ποιότητας, χαρακτηριστικοί χρόνοι (χρόνος αποκατάστασης, χρόνος υποδιπλασιασμού).
  - Ενέργεια αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση.

Για την κατανόηση και σωστή εκτέλεση του πειράματος θα πρέπει υποχρεωτικά να γνωρίζετε πριν κάνετε το πείραμα τη θεωρία που παρουσιάζεται στο **Κεφάλαιο Τ1** του βιβλίου Φυσική των Serway & Jewett.

Συνοπτική Θεωρία

Περιοδικά φαινόμενα ονομάζονται φαινόμενα τα οποία επαναλαμβάνονται μετά από ίσα χρονικά διαστήματα. Μια περίπτωση περιοδικών φαινομένων είναι η **απλή αρμονική ταλάντωση που αφορά φαινόμενα η εξέλιξη των οποίων περιγράφεται από μια ημιτονοειδή συνάρτηση**. Τέτοια φαινόμενα είναι η ταλάντωση που εκτελεί το εκκρεμές, η ταλάντωση που εκτελεί μία μάζα αναρτημένη από ελατήριο, ή η μεταβολή της τάσης και της εντασης σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που περιέχει πυκνωτή και πηνίο.

Βασικά μεγέθη που χαρακτηριζουν μία ταλάντωση είναι η περίοδος Τ η οποία ορίζεται ως το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων του φαινομένου, και η συχνότητα ν η οποία ορίζεται ως ο αριθμός των επαναλήψεων στη μονάδα του χρόνου. Επομένως είναι $\nu = \frac{1}{T}$.

Προφανώς η περίοδος έχει μονάδες χρόνου, και η συχνότητα έχει μονάδες αντίστροφου χρόνου, ή Hertz.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

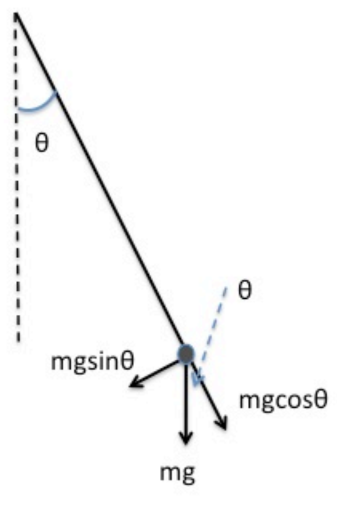
Ταλαντώσεις έχουμε σε συστήματα στα οποία ασκείται μία δύναμη η οποία έχει φορά αντίθετη της απομάκρυνσης η οποία τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισοροπίας και της οποίας το μέτρο είναι ανάλογο της απομάκρυνσης. Η δύναμη αυτή λέγεται **δύναμη επαναφοράς.**

Επειδή η απομάκρυνση ενός σώματος που υφίσταται δυνάμεις αυτής της μορφής εξαρτάται ημιτονοειδώς από το χρόνο, λέμε ότι το σώμα εκτελεί μία Αρμονική ταλάντωση.

Ενα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι το **Απλό Εκκρεμές**, το οποίο αποτελείται από μία σημειακή μάζα αναρτημένη στο ένα άκρο αβαρούς, μη εκτατού νήματος, του οποίου το άλλο ακρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο (Σχήμα 1). Εάν η μάζα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας (δηλαδή το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο), τότε στη μάζα θα ασκείται μία δύναμη μέτρου

$$F_\theta = -mg\sin\theta \qquad (1)$$

η οποία τείνει να την επαναφέρει στη θέση ισορροπίας, δηλαδή είναι μια δύναμη επαναφοράς.



Σχήμα 1. Σχηματικό διάγραμμα απλού εκκρεμούς, όπου φαίνεται η δύναμη της βαρύτητας και η κάθετη στο νήμα συνιστώσα της που λειτουργεί ως δύναμη επαναφοράς.

Για μικρές γωνίες θ ισχύει ότι $\sin\theta \cong \theta$ οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$F_\theta = -mg\theta \qquad (2)$$

Από το Δεύτερο Νόμο του Newton έχουμε

$$\begin{aligned} F &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ -mg\theta &= ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \end{aligned} \qquad (3)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (2) και λάβαμε υπ’όψιν μας ότι το μήκος του τόξου είναι $x = l\theta$, όπου l είναι το μήκος του νήματος του εκκρεμούς.

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

δηλαδή το εκκρεμές θα εκτελεί μια περιοδική ταλάντωση με μέγιστη απομάκρυνση (πλάτος) θ_0, γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, και αρχική φάση φ.

Η γωνιακή συχνότητα συνδέεται με τη συχνότητα και την περίοδο μέσω των σχέσεων

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Επομένως η περίοδος του εκκρεμούς θα είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (5)

δηλαδή είναι ανεξάρτητη της μάζας του, και εξαρτάται μόνο από το μήκος του νήματος και την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση του εκκρεμούς θα μεταβάλλονται επίσης περιοδικά αλλά με διαφορά φάσης π/2, και π αντίστοιχα, σε σχέση με την απομάκρυνση:

$$\begin{aligned} \upsilon &= \frac{d\theta}{dt} = \theta_0\omega\cos(\omega t + \varphi) = \upsilon_0\cos(\omega t + \varphi) \\ a &= \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -a_0\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \qquad (6)$$

Εάν το πλάτος των ταλαντώσεων δεν είναι πολύ μικρό ώστε να ισχύει η προσέγγιση $\sin\theta \cong \theta$, τότε και η περίοδος του εκκρεμούς θα είναι συνάρτηση του πλάτους

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cdots\right) \qquad (7)$$

Πειραματική διαδικασία

Η διάταξη του πειράματος αποτελείται από ένα απλό εκκρεμές το μήκος του οποίου μπορεί να μεταβληθεί. Επιπλέον έχουμε στη διάθεσή μας ένα μοιρογνωμόνιο ώστε να μετράμε το πλάτος της ταλάντωσης, και ένα ψηφιακό χρονόμετρο.

Α′ Μέρος: Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας

Οπως είδαμε στην εξίσωση (5) η περίοδος του εκκρεμούς δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Όμως δεν είναι δυνατόν να μετρήσουμε ακριβώς το μήκος l του εκκρεμούς, το οποίο ορίζεται ως η απόσταση από το σημείο ανάρτησης του νήματος έως το κέντρο βάρους του σώματος που είναι αναρτημένο στο άλλο άκρο του. Για το λόγο αυτό σχηματίζουμε έναν κόμπο στο νήμα κοντά στο σημείο ανάρτησης της μάζας. Εάν L είναι η απόσταση από το σημείο ανάρτησης του νήματος έως τον κόμπο, και l_0 είναι η απόσταση από τον κόμπο έως το κέντρο βάρους του σώματος, το συνολικό μήκος του εκκρεμούς θα είναι $l = l_0 + L$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5) έχουμε:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_0 + L}{g}} \Leftrightarrow \\ T^2 &= \frac{4\pi^2}{g}L + \frac{4\pi^2}{g}l_0 \end{aligned} \qquad (8)$$

Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής $y = ax + \beta$, επομένως μετρώντας την περίοδο για διαφορετικά μήκη L του εκκρεμούς (το l_0 παραμένει σταθερό εφόσον η θέση του σώματος σε σχέση με τον κόμπο δεν αλλάζει), μπορούμε να υπολογίσουμε τόσο την επιτάχυνση της βαρύτητας από την κλίση της ευθείας $T^2 - L$, όσο και το l_0 από τη διατομή της.

Για τη χάραξη αυτής της ευθείας ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Αναρτούμε το εκκρεμές από σταθερό σημείο.
2. Μετράμε την απόσταση L από το σημείο ανάρτησης έως τον κόμπο.
3. Απομακρύνουμε το εκκρεμές από τη θέση ισορροπίας κατά μια γωνία έως 10^o. Στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ταλάντωση και μετράμε με ψηφιακό χρονόμετρο το χρόνο t που απαιτείται για την εκτέλεση 10 πλήρων ταλαντώσεων.
4. Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω μέτρηση άλλες 4 φορές.

Υπολογίζουμε τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση των χρόνων, καθώς και τη μέση περίοδο και την τυπική της απόκλιση.

Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας σε έναν πίνακα της μορφής:

Πίνακας 1

α/α	**Μήκος L±δL**	**Μέτρησεις 10 περιόδων**					**Μέση τιμή μετρήσεων $\bar{t} \pm \delta \bar{t}$**	**Περίοδος $\bar{T} \pm \delta \bar{T}$**
		t_1 t ±δt	**t_2 t ±δt**	**t_3 t ±δt**	**t_4 t ±δt**	**t_5 t ±δt**		

5. Επαναλαμβάνουμε τις παραπάνω μετρήσεις για 5 συνολικά διαφορετικά μήκη του εκκρεμούς.

Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας στον παραπάνω Πίνακα.

6. Υπολογίζουμε το τετράγωνο της περιόδου, και το αντίστοιχο σφάλμα και τα καταγράφουμε σε Πίνακα της μορφής

Πίνακας 2

α/α	**Μήκος L±δL**	**Περίοδος $\bar{T} \pm \delta \bar{T}$**	**$\bar{T}^2 \pm \delta \bar{T}^2$**

7. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα του τετραγώνου της περιόδου συναρτήσει του μήκους $(T^2 - L)$, με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 2, και υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας και το σφάλμα της. Σύμφωνα με τη σχέση (8) η κλίση της ευθείας ισούται με $\frac{4\pi^2}{g}$, και θα μας δώσει την επιτάχυνση της βαρύτητας g και το σφάλμα της δg.
8. Επιπλέον υπολογίζουμε τη διατομή της ευθείας και το σφάλμα της, η οποία σύμφωνα με τη σχέση (8) ισούται με $\frac{4\pi^2}{g} l_0$. Από το λόγο της τιμής της διατομής, με την κλίση της ευθείας $(\frac{4\pi^2}{g})$ που υπολογίσαμε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος l_0 και το σφάλμα του.
9. Συμφωνεί η επιτάχυνση της βαρύτητας με την αναμενόμενη τιμή, και το μήκος l_0 με αυτό που εκτιμάτε μετρώντας το απ' ευθείας;

Β′ Μέρος: Επαλήθευση της σχέσης της περιόδου

Στη συνέχεια θα επαληθεύσουμε ότι η περίοδος είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του μήκους.

Θεωρώντας ότι η περίοδος δίνεται από μία σχέση της μορφής $T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{a}$ και λογαριθμίζοντας έχουμε:

$$\log(T) = a\log(l) + \left(\log(2\pi) - a\log(g)\right) \qquad (9)$$

Επομένως από το διάγραμμα $\log(T) - \log(l)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση της παραπάνω ευθείας και επομένως τη δύναμη α στην οποία είναι υψωμένο το μήκος l.
Αντίστοιχα από τη διατομή της ευθείας $\log(T) - \log(l)$ η οποία σύμφωνα με τη σχέση (9) είναι $\beta = \left(\log(2\pi) - a\log(g)\right)$, και γνωρίζοντας την κλίση α μπορύμε και πάλι να υπολογίσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Σε αυτό το μέρος του πειράματος θα χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες μετρήσεις που είχαμε κάνει στο Α’ μέρος. Επομένως με βάση τις τιμές του Πίνακα 2:

1. Χρησιμοποιώντας το μήκος $l_0 \pm \delta l_0$, που βρήκαμε στο προηγούμενο μέρος μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό μήκος του εκκρεμούς $l = l_0 + L$ και το σφάλμα του.
2. Επομένως με βάση τις τιμές του Πίνακα 2, συμπληρώνουμε τον ακόλουθο Πίνακα:

Πίνακας 3

α/α	**Μήκος L±δL**	**Συνολικό Μήκος** $l = l_0 + L \pm \delta l$	**log(** l **)±δlog(** l **)**	**Περίοδος** $\bar{T} \pm \delta \bar{T}$	$\log(\bar{T}) \pm \delta \log(\bar{T})$

3. Χαράσουμε το διάγραμμα $\log(T) - \log(l)$.
   Υπολογίζουμε την κλίση του διαγράμματος (και το σφάλμα της) από την οποία βρίσκουμε τη δύναμη στην οποία είναι υψωμένο το μήκος.
   Υπολογίζουμε τη διατομή του διαγράμματος (και το σφάλμα της) από την οποία βρίσκουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας.
4. Συμφωνούν οι παραπάνω τιμές με αυτές που θα αναμένατε;
5. Συμφωνεί η επιτάχυνση της βαρύτητας που υπολογίσατε σε αυτό το μέρος με αυτή που βρήκατε στο Α’ μέρος; Ποιά από τις δύο μετρήσεις είναι πιο ακριβής;

Γ′ Μέρος: Εξάρτηση της Περιόδου από το πλάτος

Η Σχέση (5) που δίνει την περίοδο του εκκρεμούς ισχύει στην περίπτωση ταλαντώσεων μικρού πλάτους. Εάν οι ταλαντώσεις έχουν μεγάλο πλάτος (οπότε δεν θα ισχύει η προσέγγιση $\sin\theta \cong \theta$), τότε το πλάτος δίνεται από τη σχέση (7).

Σε αυτό το μέρος του πειράματος θα εξετάσουμε το βάθμο στον οποίο το πλάτος της ταλάντωσης επηρεάζει την περίοδο.

1. Αναρτούμε το εκκρεμές από σταθερό σημείο (φροντίζουμε ώστε το μήκος του εκκρεμούς να είναι <u>μεγαλύτερο από 15 cm</u>).
2. Μετράμε την απόσταση L του κόμπου από το σημείο ανάρτησης.
3. Απομακρύνουμε το εκκρεμές από τη θέση ισορροπίας κατά μία γωνία 10^o, και μετράμε το χρόνο που απαιτείται για την πραγματοποίηση 10 πλήρων ταλαντώσεων.
4. Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω μέτρηση 5 φορές και καταγράφουμε τις μετρήσεις μας σε Πίνακα της μορφής:

Πίνακας 4

Μήκος L ±δL								
α/α	**Πλάτος θ±δθ**	**Μετρήσεις 10 περιόδων**					**Μέση τιμή μετρήσεων** $\bar{t} \pm \delta\bar{t}$	**Περίοδος** $\bar{T} \pm \delta\bar{T}$
		t_1 t ±δt	**t_2 t ±δt**	**t_3 t ±δt**	**t_4 t ±δt**	**t_5 t ±δt**		

5. Επαναλαμβάνουμε τις παραπάνω μετρήσεις για το ίδιο μήκος L, 4 ακόμα φορές αυξάνοντας κάθε φορά το πλάτος κατα 10^o.
6. Καταγράφουμε τις μετρήσεις στον παραπάνω Πίνακα.
7. Χρησιμοποιώντας τις τιμές του μήκους $l_0 \pm \delta l_0$ και της επιτάχυνσης της βαρύτητας που προέκυψαν από την ανάλυση στο Α’ Μέρος υπολογίζουμε τη θεωρητική τιμή της περιόδου με βάση τις Σχέσεις (5) και (7), και τις καταγράφουμε στον ακόλουθο Πίνακα.

Πίνακας 5

α/α	**Πειραματική Περίοδος** $\bar{T} \pm \delta\bar{T}$	**Θεωρητική Περίοδος (Σχ. 5)** $T \pm \delta T$	**Θεωρητική Περίοδος (Σχ. 7)** $T \pm \delta T$

8. Τι παρατηρείτε; Συμφωνούν οι περίοδοι που μετράτε με αυτές που υπολογίζετε με βάση τις Σχέσεις (5) και (7); Να σχολιάσετε τα αποτελέσματά σας.

Ερωτήσεις

1) Η Σχέση (7) είναι μια απειροσειρά. Σε ποίο όρο θα πρέπει να σταματήσουμε όταν υπολογίζουμε την περίοδο για μια δεδομένη γωνία;
2) Πως θα επηρεάζονταν τα αποτελέσματά μας εάν μετρούσαμε το χρόνο μόνο μιας περιόδου αντί για 10;

Βιβλιογραφία

Serway R. A. & Jewett J.W., Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς, 8η Εκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Χαλδούπη Χ., Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής, Μηχανική - Θερμότητα, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 1997

Instruction Set 337 501 (Linear Air Track), LD Didactic GmbH

Instruction Sheet 337 47 (Video Com), Leybold Didactic GmbH

ΠΕΙΡΑΜΑ Ι-β

Μελέτη Φυσικού Εκκρεμούς

Σκοπός πειράματος

Στο πείραμα αυτό θα μελετήσουμε το φυσικό εκκρεμές και θα μετρήσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας. Θα εξετάσουμε λοιπόν πειραματικά τα εξής:

- Την ταλάντωση του φυσικού εκκρεμούς.
- Τη ροπή αδράνειας λεπτής ράβδου.

Θεωρητικό υπόβαθρο

- Φυσικό και μαθηματικό εκκρεμές
- Ροπή αδράνειας στερεών

Για την κατανόηση και σωστή τέλεση του πειράματος θα πρέπει υποχρεωτικά να γνωρίζετε πριν κάνετε το πείραμα τη θεωρία που παρουσιάζεται στις ακόλουθες ενότητες του βιβλίου Φυσικής των Serway & Jewett: **κεφ. Μ10, Τ1.**

Συνοπτική Θεωρία

Ροπή Δύναμης και Ροπή Αδράνειας

Εάν ασκηθεί μια δύναμη σε ένα στερεό σώμα από το οποίο διέρχεται ένας σταθερός και ακίνητος άξονας τότε το σώμα αυτό θα περιστραφεί. Η δύναμη αυτή ασκεί μια ροπή $\vec{\tau}$ στο σώμα η οποία ορίζεται ως

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (1)$$

όπου $\vec{F}$ είναι η ασκούμενη δύναμη και $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα που είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής και έχει πέρας το σημείο εφαρμογής της δύναμης.
Οπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση η ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται πάντοτε σε σχέση με έναν άξονα ή ένα σημείο.
Η εφαρμογή μιας ροπής σε ένα σώμα θα έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του, όπως η εφαρμογή μίας δύναμης έχει ως αποτέλεσμα την επιτάχυνση ενός σώματος.

Κατ' αναλογία με το 2^o Νόμο του Newton για την ευθύγραμμη κίνηση, η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ συνδέεται με τη ροπη $\vec{\tau}$ μέσω της σχέσης,

$$\vec{\tau} = I\vec{a} \qquad (2)$$

Η σταθερά αναλογίας Ι ονομάζεται Ροπή Αδράνειας και ορίζεται ως

$$I = \int r^2 dm \qquad (3)$$

όπου r είναι η απόσταση του κάθε στοιχείου μάζας dm του σώματος από τον άξονα περιστροφής.

Εάν το σώμα αποτελείται από πολλαπλά μέρη μάζας m_i που βρίσκονται σε απόσταση r_i από τον άξονα περιστροφής τότε η ροπή αδράνειάς του θα είναι

$$I = \sum_i r_i^2 m_i = \sum_i I_i$$

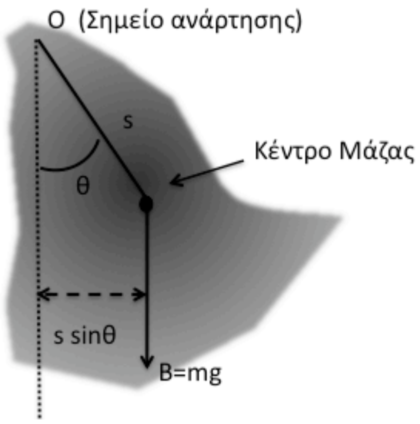
οπου I_i είναι οι ροπές αδράνειας του κάθε επιμέρους τμήματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

Σχετικά με τις ροπές αδράνειας ισχύει και το «Θεώρημα των παράλληλων αξόνων» ή «Νόμος του Steiner» σύμφωνα με το οποίο εάν γνωρίζουμε τη ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας Μ ως προς έναν άξονα α που διέρχεται από το κέντρο μάζας του τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ως προς έναν παράλληλο άξονα β που απέχει απόσταση d από τον άξονα α μέσω τη σχέσης

$$I_\beta = I_\alpha + Md^2 \qquad (4)$$

Φυσικό Εκκρεμές

Το φυσικό εκκρεμές συνίσταται από ένα σώμα αναρτημένο από σταθερό άξονα που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του, και μπορεί να ταλαντώνεται γύρω από αυτόν (Σχήμα 1).



Σχήμα 1
Σχηματικό διάγραμμα φυσικού εκκρεμούς. Ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας (στο οποίο βρίσκεται επίσης και το κέντρο μάζας του σώματος). Η δύναμη του βάρους ασκεί μια ροπή στο σώμα η οποία τείνει να το επαναφέρει στην κατακόρυφο (θέση ισορροπίας).

Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας έχει ως αποτέλεσμα την άσκηση ροπής επαναφοράς με μέτρο

$$\tau = -mgs\sin(\theta) \qquad (5)$$

όπου m είναι η μάζα του σώματος
g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας,

s είναι η απόσταση του άξονα περιστροφής από το κέντρο μάζας του σώματος
θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι κάθετη στον οριζόντιο άξονα περιστροφής με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο Ο.

Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση υποδεικνύει ότι η ροπή τείνει να περιστρέψει το σώμα πρός τη θέση ισορροπίας.

Κατά τα γνωστά, για μικρές ταλαντώσεις (sinθ ≈θ) η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\tau = -mgs\theta \quad (6)$$

Η εφαρμογή της ροπής επαναφοράς θα αναγκάσει το σώμα να εκτελέσει ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση με τη γωνιακή επιτάχυνση

$$\dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

που δίνεται από τη σχέση:

$$\tau = I_S\ddot{\theta} \quad (7)$$

όπου I_S είναι η ροπή αδράνειας ώς πρός τον άξονα περιστροφής.

Επομένως από τις (6) και (7) έχουμε τη διαφορική εξίσωση της ταλάντωσης:

$$I_s\ddot{\theta} = -mgs\theta$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

δηλαδή το σώμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Στη παραπάνω σχέση $\omega = \sqrt{\frac{mgs}{I_s}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

Α είναι το πλάτος της ταλάντωσης, δηλαδή η μέγιστη γωνιακή απομάκρυνση του σώματος από τον κατακόρυφο άξονα,
και δ είναι η αρχική φάση.
Οι σταθερές Α και δ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Από τη λύση της παραπάνω εξίσωσης έχουμε ότι η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_s}{mgs}} \quad (8)$$

Από το νόμο του Steiner (σχέση 4) έχουμε ότι

$$I_S = I_0 + ms^2 \quad (9)$$

όπου

I_S είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής σε απόσταση s από το κέντρο μάζας

I_0 είναι η ροπή αδράνειας ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας

Μπορούμε να εκφράσουμε τη ροπή αδράνειας του σώματος στη μορφή

$$I_0 = mK^2 \quad (10).$$

Το μέγεθος K ονομάζεται ακτίνα αδράνειας (ή γυροσκοπική ακτίνα) και εκφράζει την απόσταση του κέντρου βάρους από τον άξονα περιστροφής.
Ορίζοντας $I_0 = mK^2$ όπου K είναι ακτίνα αδράνειας (ή γυροσκοπική ακτίνα), και συνδυάζοντας τις (8) και (9) έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2 + s^2}{gs}} \quad (11)$$

Από την παραπάνω σχέση και κατ' αναλογία με τη σχέση της περιόδου για το μαθηματικό εκκρεμές,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (12)$$

βλέπουμε ότι εάν κατασκευάσουμε ένα απλό εκκρεμές με μήκος

$$l = s + \frac{K^2}{s} \quad (13)$$

αυτό θα έχει την ίδια περίοδο με το φυσικό εκκρεμές. Το μήκος αυτό λέγεται **ισοδύναμο μήκος.**

Η εξίσωση (13) είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς s:

$$s^2 - ls + K^2 = 0 \quad (14)$$

η οποία έχει δύο λύσεις s_1 και s_2 για τις οποίες το εκκρεμές έχει την ίδια περίοδο ταλάντωσης.
Επομένως το φυσικό εκκρεμές έχει δύο δυνατές θέσεις για κάθε μεριά από το κέντρο μάζας για τις οποίες η περίοδος είναι η ίδια.

Για τις λύσεις s_1 και s_2 της εξίσωσης (14) ισχύει:

$$s_1 + s_2 = l \quad (15)$$

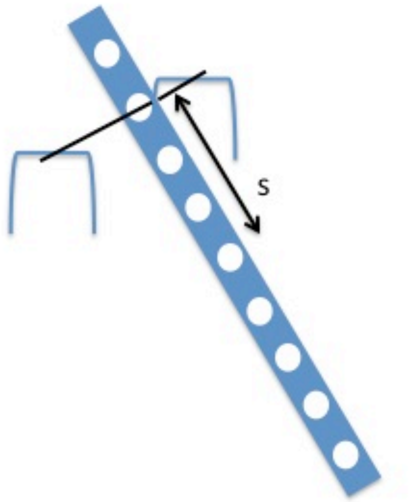
και

$$s_1 s_2 = K^2 \quad (16)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε:
(α) το μήκος του ισόχρονου απλού εκκρεμούς και από τη σχέση (12) την επιτάχυνση της βαρύτητας.
(β) τη ροπή αδράνειας του σώματος μέσω της σχέσης $I_0 = mK^2$.

Πειραματική διάταξη

Η διάταξη για τη μελέτη του φυσικού εκκρεμούς αποτελείται από μία ράβδο αλουμινίου η οποία έχει οπές κατά μήκος της. Η ράβδος αναρτάται από μια σταθερή βάση με τη βοήθεια ενός μη ελαττού άξονα ο οποίος μπορεί να προσαρμοστεί στις διαφορετικές οπές. Η ράβδος μπορεί να ταλαντωθεί ελεύθερα περί αυτόν τον άξονα.

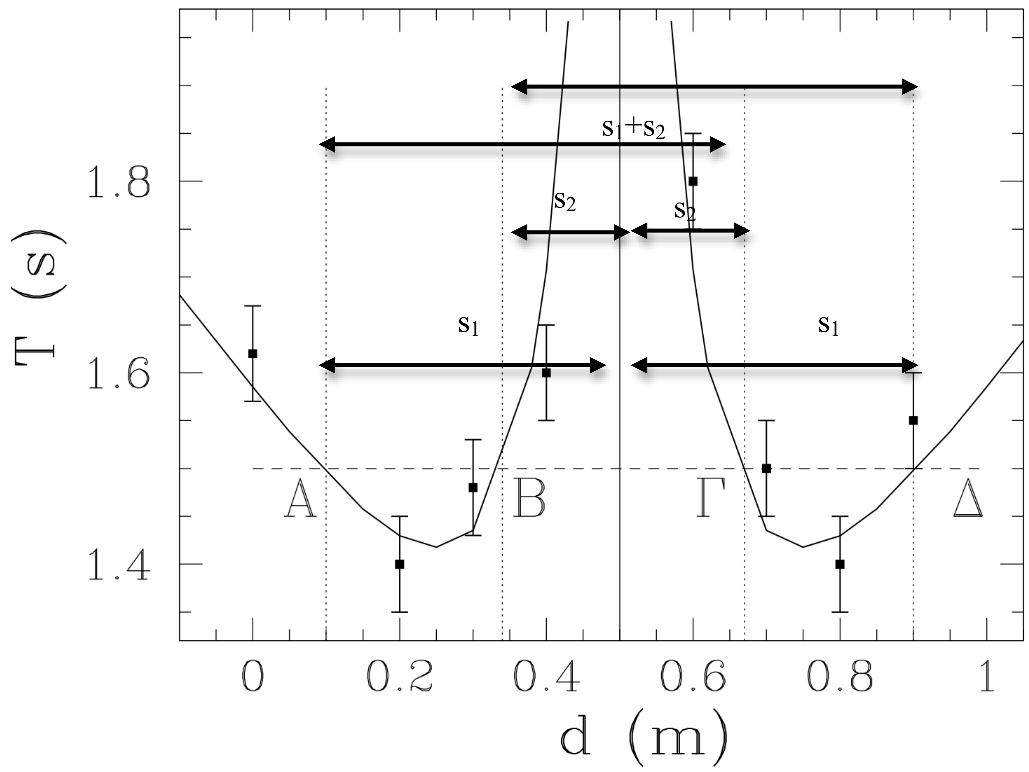


Σχήμα 2: Πειραματική διάταξη για τη μελέτη του φυσικού εκκρεμούς.

Η καταγραφή της περιόδου της ταλάντωσης γίνεται με τη βοήθεια ψηφιακού χρονομέτρου. Στον κατακόρυφο άξονα που συγκρατεί τη ράβδο είναι προσαρτημένη μια πηγή LED και ένας φωτοαισθητήρας. Αυτό το σύστημα καταγραφής είναι συνδεμένο με μια ψηφιακή διάταξη που καταγράφει το χρόνο μεταξύ δύο διαβάσεων της ράβδου μπροστά από τον αισθητήρα, δηλαδή το χρόνο μιας ημιπεριόδου.

Το διάγραμμα της περιόδου T για διαφορετικά σημεία ανάρτησης σε απόσταση d από το άκρο της ράβδου έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 3. Οι δυο κλάδοι αντιστοιχούν σε σημεία ανάρτησης εκατέρωθεν του κέντρου μάζας και είναι συμμετρικοί περί του κέντρου μάζας ($s=0$). Η ευθεία σταθερής περιόδου τέμνει τους δύο κλάδους σε τέσσερα σημεία (Α, Β, και Γ, Δ). Τα σημεία Α και Β αντιστοιχούν στις λύσεις s_1 και s_2 για τον ένα κλάδο, ενώ τα σημεία Δ και Γ αντιστοιχούν στις ανάλογες λύσεις για τον άλλο κλάδο.

Επομένως η απόσταση ΑΓ θα αντιστοιχεί στην απόσταση $s_1 + s_2$, δηλαδή στο μήκος του ισοδύναμου απλού εκκρεμούς. Το ίδιο ισχύει και για την απόσταση ΒΔ.
Αντίστοιχα η απόσταση καθενός από τα σημεία Β και Γ από το κέντρο μάζας θα αντιστοιχεί στη λύση s_1, και η αντίστοιχη απόσταση των σημείων Α και Δ στη λύση s_2. Επομένως μετρώντας αυτές τις αποστάσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο $s_1 \cdot s_2$ και αντίστοιχα την ακτίνα αδράνειας και τη ροπή αδράνειας της ράβδου.



Σχήμα 3: Μεταβολή της περιόδου συναρτήσει της απόστασης του σημείου ανάρτησης της ράβδου από το άκρο της. Οι δυο κλάδοι αντιστοιχούν σε σημεία ανάρτησης εκατέρωθεν του κέντρου μάζας. Βλέπουμε ότι σε κάθε κλάδο υπάρχουν δύο σημεία (Α,Β και Γ, Δ) τα οποία αντιστοιχούν στις λύσεις της εξίσωσης (14).

Πειραματική διαδικασία

1. Μετράμε τη μάζα της ράβδου.
2. Τοποθετούμε με προσοχή τον κύλινδρο ανάρτησης σε μια από τις οπές της ράβδου.
3. Ευθυγραμμίζουμε την πηγή LED με τον αισθητήρα.
4. Θέτουμε σε λειτουργία το χρονόμετρο, και επιλέγουμε ως τρόπο λειτουργίας (MODE) την εξωτερική διέγερση (external triggering).
5. Τοποθετούμε τον διακόπτη Start-Stop στη θέση Stop.
6. Πιέζουμε το διακόπτη MASTER RESET. Μετά από μερικά δευτερόλεπτα η οθόνη Counts Display θα έχει την ένδειξη 88.
7. Τοποθετούμε τον διακόπτη Start-Stop στη θέση Start

8. Απομακρύνουμε τη ράβδο από τη θέση ισορροπίας κατά μια μικρή γωνία (~5°) και την αφήνουμε ελεύθερη να εκτελέσει ταλάντωση.
9. Οταν ολοκληρωθεί μια ταλάντωση, το χρονόμετρο θα μας δώσει την περίοδό της. Ο χρόνος είναι σε msec.
10. Καταγράφουμε τη μέτρηση του χρόνου της μίας ταλαντώσης, και επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση 10 φορές.
11. Μετράμε την απόσταση d της οπής ανάρτησης από το άκρο της ράβδου.
12. Επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις για όλες τις διαφορετικές οπές έως το μέσο της ράβδου.
13. Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας σε πίνακα της μορφής

Πίνακας 1

α/α	**Απόσταση d±δd**	**Μέτρησεις χρόνων περίοδου (±δt)**										**Μέση τιμή μετρήσεων Περιόδου $\overline{T} \pm \delta \overline{T}$**
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	

14. Αναστρέφουμε τη ράβδο και επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις έως το άλλο άκρο. Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας στον παραπάνω πίνακα.
15. Υπολογίζουμε την μέση τιμή της περίόδου καθώς κα την τυπική απόκλιση των μετρήσεων για κάθε απόσταση d από το άκρο της ράβδου.
16. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα T – d (βλ. Σχήμα 3).
17. Χαράσουμε οριζόντια γραμμή στο διάγραμμα T – d όπως φαίνεται στο Σχήμα 3 (διακεκομμένη γραμμή) και υπολογίζουμε τις τιμές s_1 και s_2.

    Ο ακριβέστερος τρόπος για να υπολογίσουμε τις τιμές s_1 και s_2 είναι να μετρήσουμε τις απόστάσεις ΑΓ, ΒΓ και ΒΔ, οι οποίες αντιστοιχούν στις τιμές $ΑΓ = s_1 + s_2$, $ΒΓ = 2\times s_2$, $ΒΔ = s_1 + s_2$.

    Υπολογίζουμε τη μέση τιμή των αποστάσεων ΑΓ και ΒΔ, δηλαδή το $\overline{(s_1 + s_2)}$

    Από την απόσταση ΒΓ υπολογίζουμε την τιμή s_2 και στη συνέχεια υπολογίζουμε την απόσταση s_1 από τη μέση τιμή που υπολογίσαμε στο παραπάνω βήμα.
18. Υπολογίζουμε το μήκος του ισοδύναμου απλού εκκρεμούς με βάση τη σχέση (15) και στη συνέχεια την επιτάχυνση της βαρύτητας.
19. Υπολογίζουμε την ακτίνα αδράνειας της ράβδου και τη ροπή αδράνειάς της με βάση τις σχέσεις (16) και (10).
20. Πώς συγκρίνονται τα αποτελέσματά σας με τις αναμενόμενες τιμές για τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα περιστροφής που περνά από το

κέντρο μάζας της, και την επιτάχυνση της βαρύτητας; (Θεωρήστε ότι η ράβδος είναι ομογενής και αγνοήστε την ύπαρξη των οπών).

Ερωτήσεις

1) Εξαρτάται η περίοδος του φυσικού εκκρεμούς από τη μάζα του ;

2) Με βάση τη σχέση (11) να υπολογίσετε για ποιά τιμή της απόστασης s ελαχιστοποιείται η περίοδος του φυσικού εκκρεμούς.
Τι θα ισχύει για τις αποστάσεις s_1 και s_2 σε αυτή την περίπτωση (μπορείτε να βασίσετε την απάντησή σας στο διάγραμμα του σχήματος 3);

Βιβλιογραφία

Μπαχαρίδης Χ., Οδηγίες Χρήσεις Χρονομετρητή

Serway R. A. & Jewett J.W., Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς, 8^{η} Εκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

F. Tyler, A Laboratory Manual of Physics, Edward Arnold LTD, London